

JOURNAL INTERNATIONAL DE TECHNOLOGIE, DE L'INNOVATION,
DE LA PHYSIQUE, DE L'ENERGIE ET DE L'ENVIRONNEMENT

Contribution à l'étude de la conductivité thermique d'un plasma d'air

P. André, N. Kohio, A. K. Kagoné, Z. Koalaga et F. Zougmore



ISSN : 2428-8500

DOI : 10.18145/jitipee.v5i2.222

Le sujet de cet article a été présenté lors du colloque sur les arcs électriques (CAE XIV) les 19 et 20 mars 2019 à Bourges.

L'article publié a fait l'objet d'une expertise indépendante par deux spécialistes du domaine.

Contribution à l'étude de la conductivité thermique d'un plasma d'air

Pascal André⁽¹⁾, Abdoul Karim Kagoné⁽²⁾, Zacharie Koalaga⁽²⁾, Nièssan Kohio⁽²⁾

et François Zougmore⁽²⁾

⁽¹⁾ LPC, Université Clermont Auvergne, CNRS, UMR 6533, F-63000 Clermont-Ferrand, France

⁽²⁾ LAME, Université Ouaga 1 Professeur Joseph Ki-Zerbo, 03 BP 7021, Ouagadougou 03, Burkina Faso

pascal.andre@uca.fr

Résumé – Le choix des matériaux (contact, joues gazogènes), du gaz plasmagène sont des enjeux cruciaux pour l'amélioration des appareillages de coupure. Le refroidissement du milieu et donc l'extinction de l'arc électrique est intimement lié à sa conductivité thermique. Dans les mélanges de gaz et de plasma en équilibre chimique, la conductivité thermique est habituellement déterminée par la somme de quatre conductivités thermiques : les deux conductivités thermiques dues aux mouvements de translation des électrons et des particules lourdes (ions, atomes et molécules), la conductivité interne due aux degrés de libertés (excitation électronique, rotation et vibration) et la conductivité thermique de réaction chimique. Les temps caractéristiques dans les appareillages de coupure sont de l'ordre de la dizaine de milliseconde (écoulement du gaz, déplacement de l'arc sur les joues gazogènes). Ainsi, l'équilibre chimique peut ne pas être atteint et à cet effet nous proposons d'étudier la conductivité thermique d'un plasma d'air sec pour plusieurs pressions (1 atm, 5 atm, 10 atm.). Puis, nous étudions la composition chimique à l'équilibre chimique et l'évolution des concentrations des différentes espèces chimiques pour atteindre leur valeur d'équilibre à l'aide d'un modèle de cinétique chimique. Nous évaluons notamment le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre chimique. Nous montrons ainsi que certaines espèces chimiques ont besoin de plus de 1 ms pour atteindre cet équilibre. Nous discutons alors de la validité des hypothèses émises pour le calcul de la conductivité thermique.

Mots clés : plasma d'air, équilibre chimique, composition, conductibilité thermique de réaction, coefficients de transport

DOI : 10.18145/jitipee.v5i2.222

Introduction

Afin d'améliorer et/ou de choisir, le gaz et/ou les matériaux des joues gazogènes dans les appareillages de coupure électrique, de nombreux auteurs préconisent d'étudier, à minima, la conductivité thermique [1, 2]. En effet, le refroidissement du milieu et donc l'extinction de l'arc électrique est intimement lié à sa conductivité thermique.

Le vecteur flux de chaleur est directement proportionnel au gradient négatif de la température : $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$. La constante de proportionnalité λ est la conductivité thermique du milieu. Dans les mélanges de gaz et de plasma en équilibre chimique, la conductivité thermique est habituellement déterminée par la somme de quatre conductivités thermiques : les deux conductivités thermiques dues aux mouvements de translation des électrons et des particules lourdes (ions, atomes et molécules), la conductivité interne due aux degrés de libertés (excitation électronique, rotation et vibration) et la conductivité thermique de réaction chimique [3, 4]. On peut alors écrire la conductivité thermique sous la forme de la somme de deux conductivités thermiques :

$$\lambda = \lambda_{\text{réaction}} + \lambda_{\text{figée}}$$

avec $\lambda_{\text{réaction}}$ la conductivité thermique dite réactionnelle et $\lambda_{\text{figée}}$ la conductivité thermique dite non-réactionnelle. La conductivité thermique réactionnelle contribue fortement à la conductivité thermique totale.

La conductivité thermique de réaction dans les plasmas dit thermiques est habituellement évaluée par la théorie de Butler et Brokaw [5]. L'une des hypothèses fortes est que l'équilibre chimique du mélange soit atteint. En effet, dans cette formulation, seules les variations de concentration dues aux variations de température sont prises en compte.

Cependant, les temps caractéristiques dans les appareillages de coupure sont de l'ordre de la dizaine de milliseconde (écoulement du gaz, déplacement de l'arc sur les joues gazogènes). Ainsi, l'équilibre chimique peut ne pas être atteint tout au long du processus de coupure. Nous nous proposons donc d'étudier les temps de réaction chimique dans un plasma thermique d'air sec (79% mol N₂ et 21% mol O₂) pour plusieurs pressions : 1 atm., 5 atm. et 10 atm. dans une gamme de températures comprise entre 500 K et 25.000 K. Nous avons opté pour une formulation simplifiée, afin de développer un modèle de cinétique, bien que dans les appareillages de coupures les mélanges puissent devenir bien plus complexes [6, 7].

La conductivité thermique dite réactionnelle et la conductivité thermique dite non-réactionnelle seront étudiées en fonction de la température et pour les pressions considérées. Nous discuterons de la validité des hypothèses de la théorie de Butler et Brokaw [5] par un calcul de cinétique chimique. Puis, nous donnerons des ordres de grandeurs des temps pour lesquels la théorie de Butler et Brokaw est applicable.

1. Base théorique pour les calculs

Afin d'obtenir les coefficients de transport et plus particulièrement la conductivité thermique, nous devons connaître la composition chimique. Nous supposons que la pression est donnée et qu'il n'y a pas de gradient de pression dans le volume de plasma considéré. Nous optons pour la minimisation de l'énergie libre de Gibbs [6, 7] pour obtenir la composition chimique. Cette méthode nécessite la connaissance de tous les potentiels chimiques des espèces chimiques prises en compte [6, 7]. Deux autres équations sont nécessaires : la loi de Dalton corrigé de l'abaissement de pression due aux espèces chargées (correction de Debye-Hückel) et la neutralité électrique [6, 7]. Nous prenons en compte 9 espèces chimiques monoatomiques (N , N^+ , N^{++} , N^{+++} , O , O^- , O^+ , O^{++} , O^{+++}), 9 espèces chimiques diatomiques (N_2 , N_2^- , N_2^+ , NO , NO^- , NO^+ , O_2 , O_2^- , O_2^+), dix espèces chimiques polyatomiques (N_2O , N_2O_3 , N_2O_4 , N_2O_5 , N_2O^+ , N_3 , NO_2 , NO_2^- , NO_3 , O_3 , NO_3^-) et les électrons. Le calcul des fonctions de partition des espèces monoatomiques et diatomiques nécessaires à la détermination des potentiels chimiques est décrite dans [8]. Sur les figures 1.a., 1.b. et 1.c., nous observons que la première dissociation, apparaissant vers 3.350 K à la pression atmosphérique, est celle de l'oxygène, la deuxième dissociation est celle de l'azote N_2 apparaissant vers 6.600 K puis nous observons deux ionisations successives vers 14.500 K de l'azote et de l'oxygène monoatomique. Les espèces chimiques majoritaires dans la gamme de température considérée sont donc l'azote N_2 pour les températures les plus basses, l'azote monoatomique N pour les températures intermédiaires et les électrons pour les plus hautes températures. La neutralité électrique est réalisée entre les électrons et les ions NO^+ pour les températures les plus basses et entre les électrons et les ions N^+ pour les températures les plus élevées. En comparant les courbes (Figure 1.a. à Figure 1.c.), pour des pressions croissantes, on observe que les températures pour lesquelles les réactions s'effectuent sont plus importantes à mesure que les pressions augmentent.

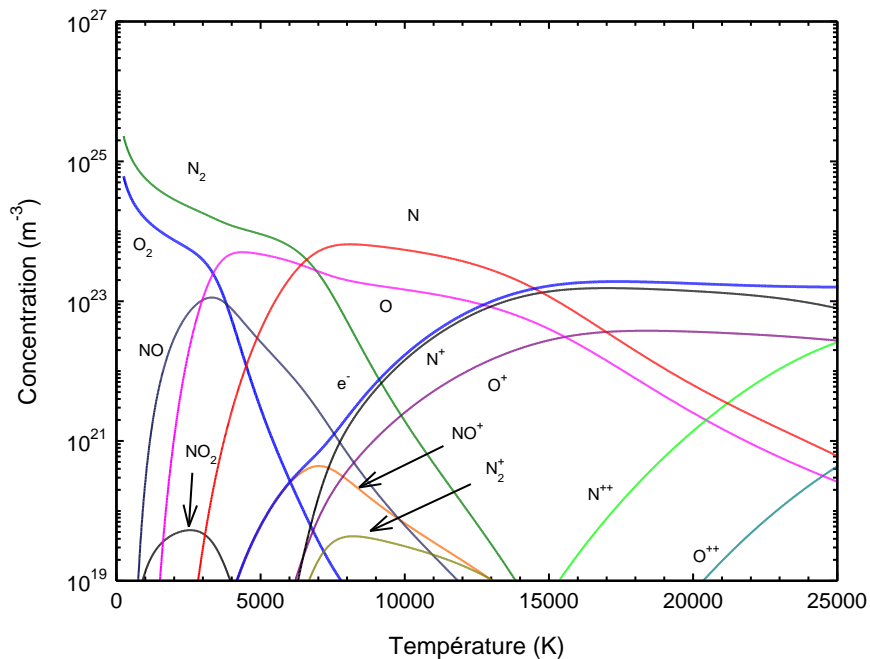


Figure 1.a. : Composition chimique d'un plasma d'air sec en fonction de la température (79% mol N_2 et 21% mol O_2) à la pression atmosphérique.

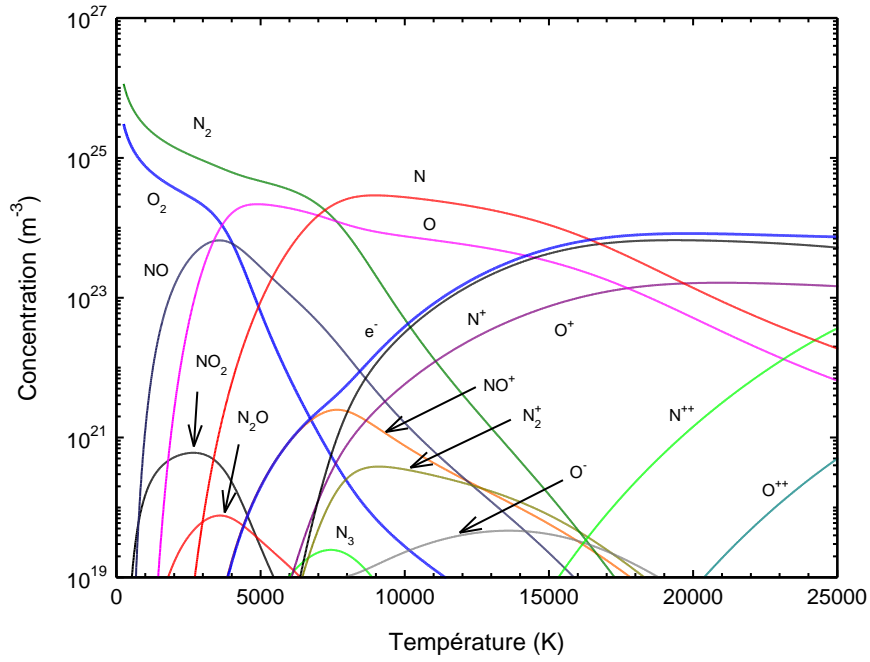


Figure 1.b. : Composition chimique d'un plasma d'air sec en fonction de la température pour un mélange initial (79% mol N_2 et 21% mol O_2) pour une pression de 5 atm.

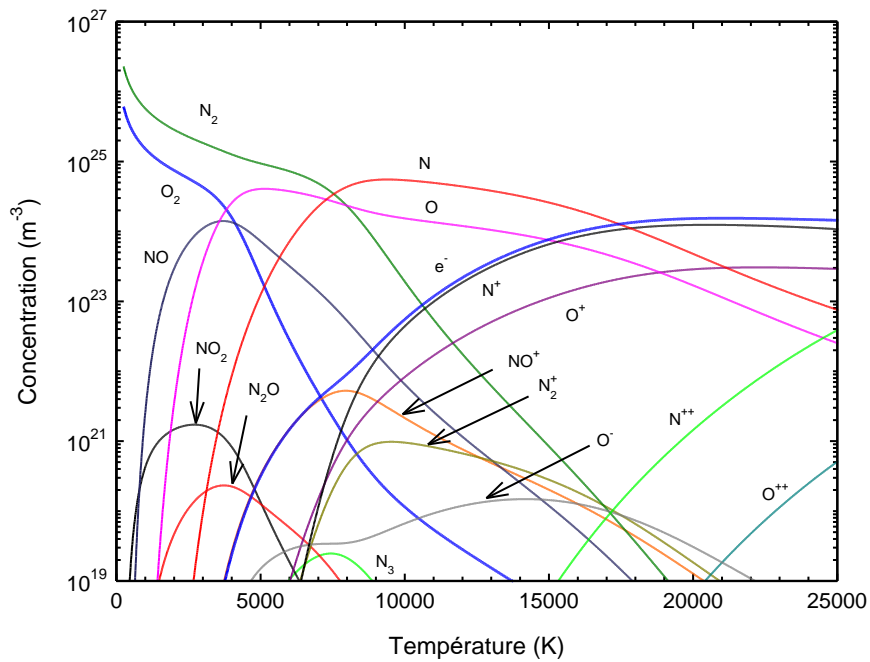


Figure 1.c. : Composition chimique d'un plasma d'air sec en fonction de la température pour un mélange initial (79% mol N_2 et 21% mol O_2) pour une pression de 10 atm.

Pour obtenir les coefficients de transport, nous devons connaître les intégrales de collision : nous prenons celles décrites dans les articles [9, 10]. La conductivité thermique de translation des électrons est calculée à l'ordre trois et pour les espèces lourdes à l'ordre deux du développement en polynômes de Sonine [9, 11]. La conductivité thermique interne est basée sur la correction de Eucken [9, 11]. La conductivité thermique de réaction est calculée avec la méthode de Butler et Brokaw [5] qui impose de nombreuses conditions restrictives : les forces extérieures sont négligeables, la pression est uniforme, la diffusion thermique est négligeable, l'équilibre chimique est atteint ainsi que l'équilibre thermique.

2. Résultats et analyses

Sur la figure 2.a., nous obtenons les quatre conductivités thermiques. Les deux plus fortes contributions à la conductivité thermique totale sont celles de la conductivité thermique de réaction aux températures inférieures à 10.000 K et la conductivité thermique de translation des électrons aux plus hautes températures. Cette dernière contribution est directement liée à la concentration en électrons du plasma. En ce qui concerne la conductivité thermique de réaction nous observons des pics que nous pouvons associer à la dissociation de O_2 pour le premier, à la dissociation de N_2 pour le second et à l'ionisation des espèces atomiques pour le troisième. Au niveau des pics, nous observons de larges différences entre les auteurs. Ces différences sont dues aux choix des sections efficaces (potentiels d'interaction). Par exemple, nous obtenons les paramètres de la collision $N-N_2$ par une règle de mélange alors que les auteurs Boulos et al [4] et Capitelli et al [11] calculent cette section à partir d'un potentiel de Lennard Jones et d'un potentiel répulsif ; en ce qui concerne le pic due à l'ionisation ce sont les paramètres du transfert de charge qui diffèrent ($N-N^+$; $O-O^+$) suivant les auteurs.

Sur la figure 2.b., nous avons reporté la conductivité thermique pour plusieurs pressions en fonction de la température. Puisque chaque pic de conductibilité thermique peut-être associé à une réaction chimique et en accord avec le principe de Le Chatelier [12], les pics se déplacent vers les plus hautes températures. En effet, lors d'une réaction chimique qui produit un plus grand nombre de molécules différentes que le nombre de réactifs, cette augmentation contribue à l'augmentation de la pression. Par exemple, la dissociation de la molécule de diazote N_2 produit deux atomes d'azote ($N_2 \rightarrow 2 N$). Le principe de Le Chatelier indique que « l'évolution s'oppose aux perturbations qui l'ont engendrée et en modère l'effet » ainsi pour diminuer cette augmentation de pression la dissociation apparaît à plus haute température lorsque la pression augmente.

La contribution de la conductivité thermique de réaction est la plus importante aux températures les plus basses (<10.000 K). La conductivité thermique figée augmente avec la pression lorsque l'ionisation a eu lieu puisqu'elle dépend de la concentration en électrons via la conductivité thermique de translation de ceux-ci. En effet, la concentration électronique augmente avec la pression (Figure 1.a. à Figure 1.c.).

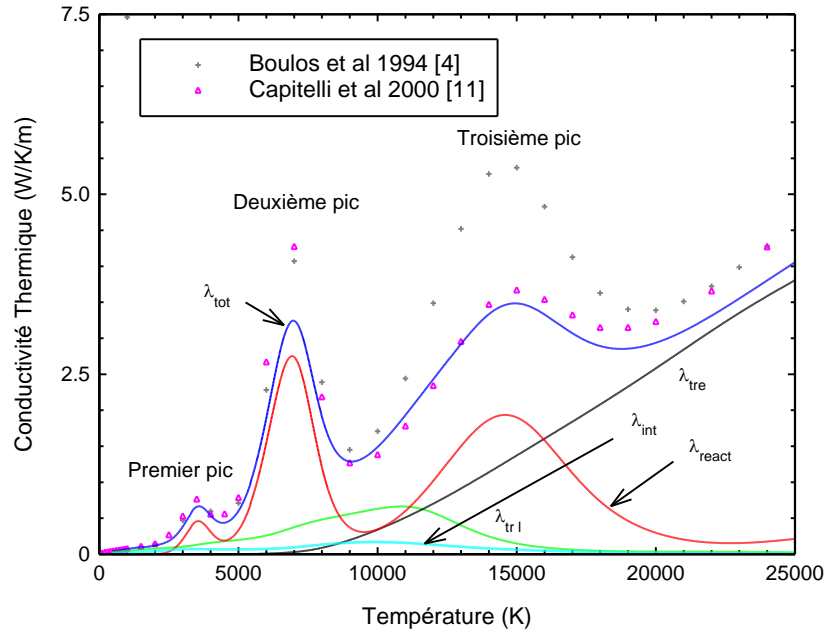


Figure 2.a. : Évolution des conductivités thermiques de translation des électrons $\lambda_{tr,e}$ et des particules lourdes $\lambda_{tr,l}$, interne λ_{int} , de réaction λ_{react} et totale λ_{tot} d'un plasma d'air à la pression atmosphérique en fonction de la température.

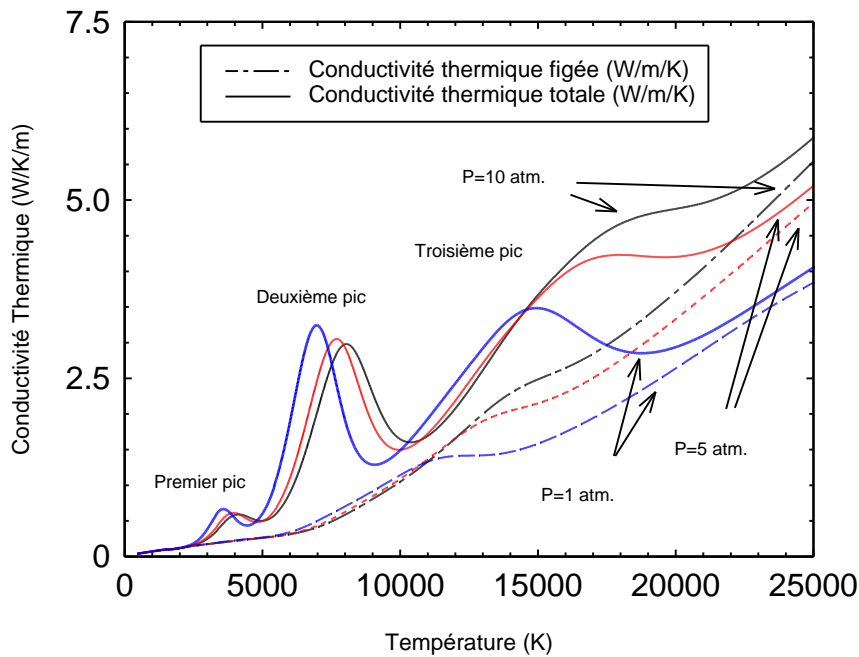


Figure 2.b. : Évolution de la conductivité thermique (figée et totale) d'un plasma d'air en fonction de la température pour 3 pressions (1 atm, 5 atm., 10 atm.)

Afin de pouvoir établir un modèle cinétique, nous ne prenons en compte que les espèces chimiques simples suivantes : O, O⁺, O₂, O₂⁺, N, N₂, N₂⁺, NO, NO⁺, NO₂. Dans le tableau 1, nous listons l'ensemble des réactions chimiques prises en compte. Les taux de réactions sont habituellement mal connus [13], nous calculons les taux de réaction inverses en fonction de la constante d'équilibre [14]. Les taux de réaction chimique utilisés dans ce modèle sont tirés de la compilation de C. Park [15].

$O_2 \rightarrow O+O$	$N_2 + N_2 \rightarrow N + N + N_2$	$O_2^+ + N \rightarrow N^+ + O_2$
$O_2+NO \rightarrow O+O+NO$	$N_2 + O \rightarrow N + N + O$	$NO + O^+ \rightarrow N^+ + O_2$
$O_2+N_2 \rightarrow O+O+N_2$	$N_2 + N \rightarrow N + N + N$	$O_2^+ + N_2 \rightarrow N_2^+ + O_2$
$O_2+O \rightarrow O + O + O$	$N_2 + e^- \rightarrow N + N + e^-$	$NO^+ + N \rightarrow O^+ + N_2$
$O_2 + N \rightarrow O + O + N$	$N_2 + O \rightarrow NO + N$	$NO^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + NO$
$NO + O_2 \rightarrow N + O + O_2$	$NO + O \rightarrow O_2 + N$	$NO^+ + O \rightarrow O_2^+ + N$
$NO + NO \rightarrow N + O + NO$	$N + O \rightarrow NO^+ + e^-$	$O^+ + N_2 \rightarrow N_2^+ + O$
$NO + N_2 \rightarrow N + O + N_2$	$N + N \rightarrow N_2^+ + e^-$	$NO^+ + N \rightarrow N_2^+ + O$
$NO + O \rightarrow N + O + O$	$O + O \rightarrow O_2^+ + e^-$	$O + NO \rightarrow NO_2$
$NO + N \rightarrow N + O + N$	$O + e^- \rightarrow O^+ + e^- + e^-$	$O + NO_2 \rightarrow NO + O_2$
$N_2 + O_2 \rightarrow N + N + O_2$	$N + e^- \rightarrow N^+ + e^- + e^-$	
$N_2 + NO \rightarrow N + N + NO$	$NO^+ + O \rightarrow N^+ + O_2$	

Tableau 1 : Réactions chimiques prises en compte dans le modèle cinétique. Les taux de réaction chimique afférents sont donnés dans [15].

Afin de valider l'hypothèse de l'équilibre chimique, nous reportons sur les figures 3 et 4, les évolutions des concentrations des espèces chimiques en fonction du temps pour trois pressions 1 atm, 5 atm. et 10 atm qui concernent respectivement les deuxième et troisième pics de la conductivité thermique. Les conditions initiales pour les concentrations des espèces chimiques ont été choisies comme étant celles proches d'avant le pic de réaction. En effet, plus les conditions initiales des concentrations des espèces chimiques sont éloignées des concentrations à l'équilibre chimique plus le temps de réaction chimique est important.

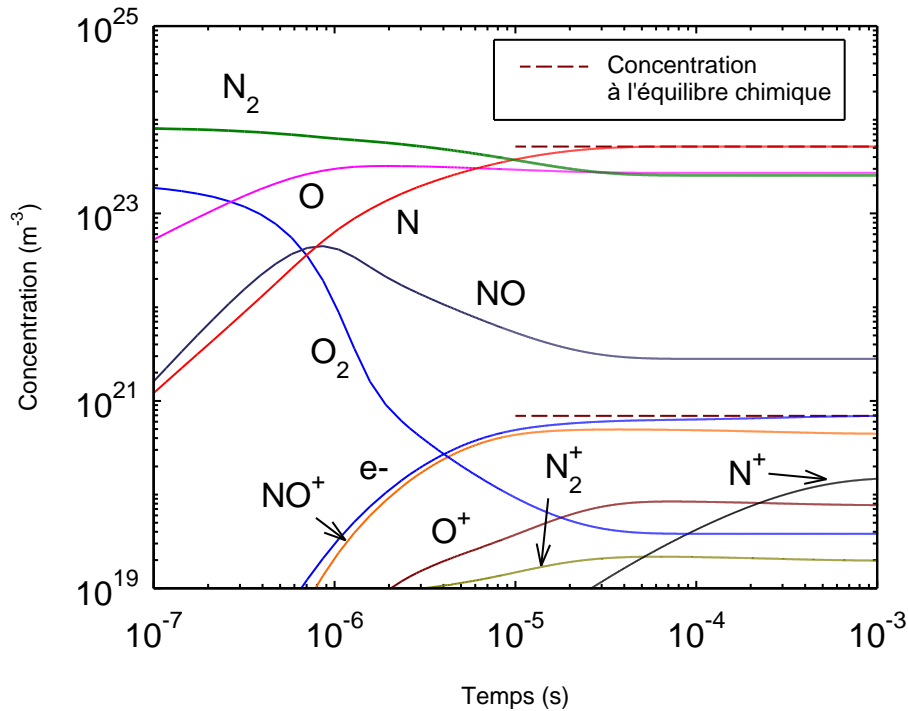


Figure 3.a : Évolutions des concentrations chimiques d'un plasma d'air en fonction du temps pour le pic de dissociation de N_2 ($T=7.000$ K pour 1 atm.) en supposant un chauffage instantané.

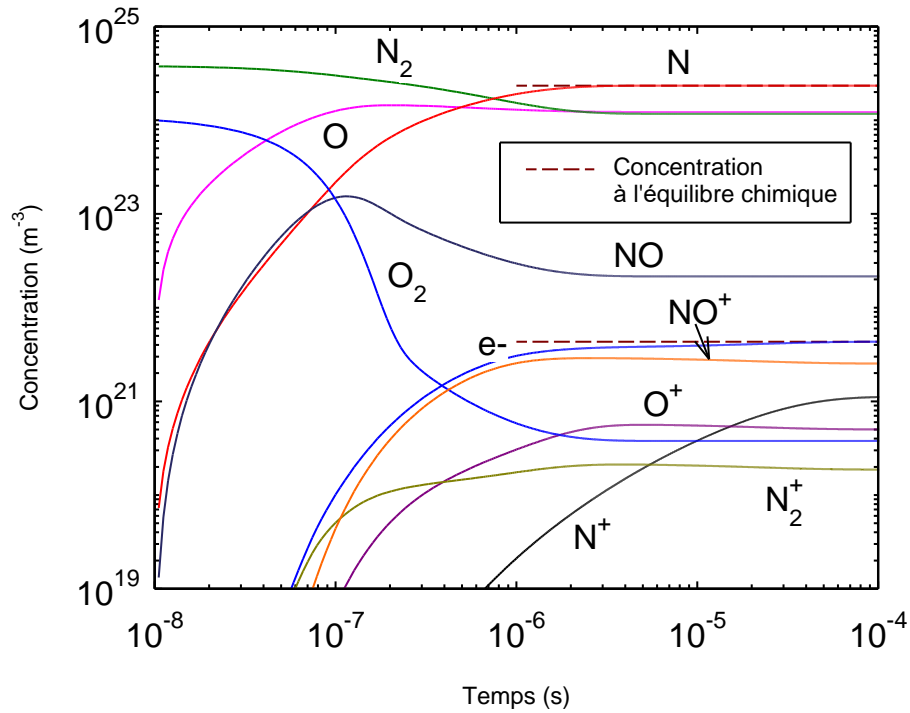


Figure 3.b. : Évolutions des concentrations chimiques d'un plasma d'air en fonction du temps pour le pic de dissociation de N_2 ($T=7.680$ K pour 5 atm.) en supposant un chauffage instantané.

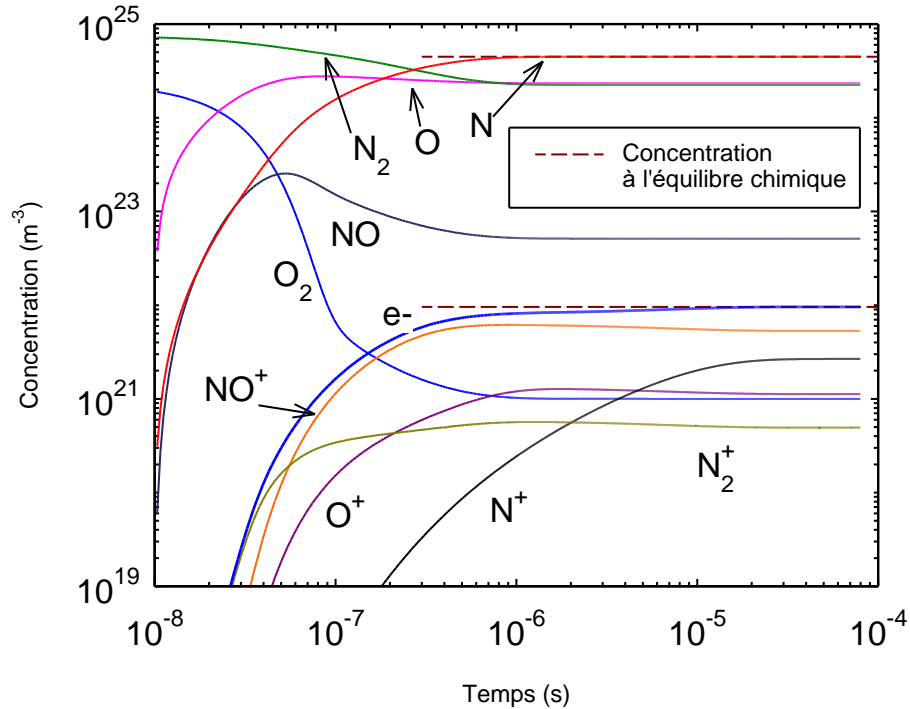


Figure 3.c. : Évolutions des concentrations chimiques d'un plasma d'air en fonction du temps pour le pic de dissociation de N_2 ($T=8.050$ K pour 10 atm.) en supposant un chauffage instantané.

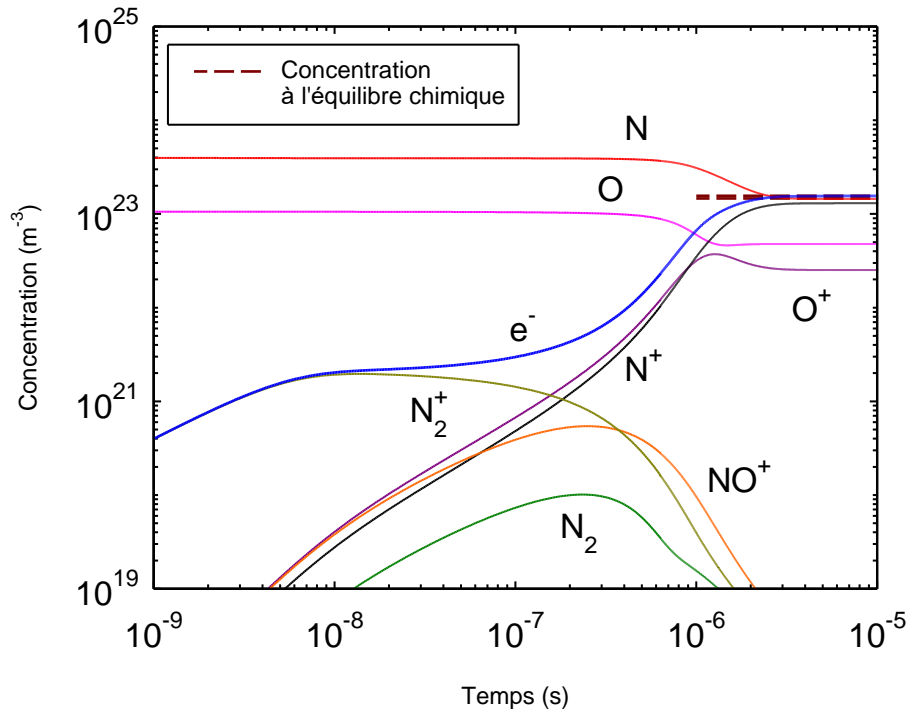


Figure 4.a.: Évolutions des concentrations chimiques d'un plasma d'air en fonction du temps pour le pic de l'ionisation de N ($T=14.600$ K pour 5 atm.) en supposant un chauffage instantané.

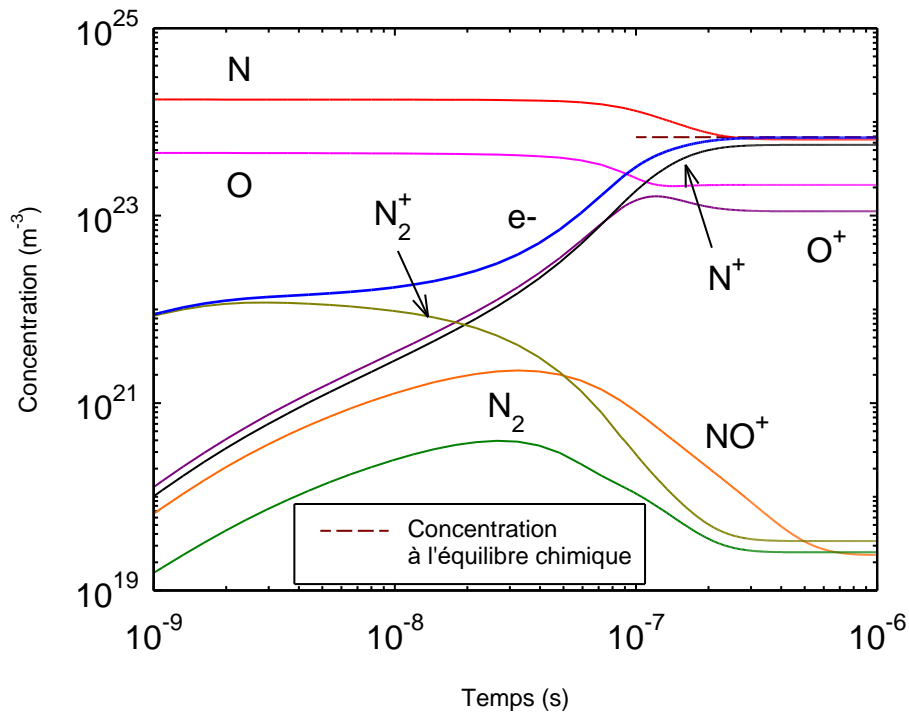


Figure 4.b. : Évolutions des concentrations chimiques d'un plasma d'air en fonction du temps pour le pic de l'ionisation de N ($T=16.500$ K pour 5 atm) en supposant un chauffage instantané.

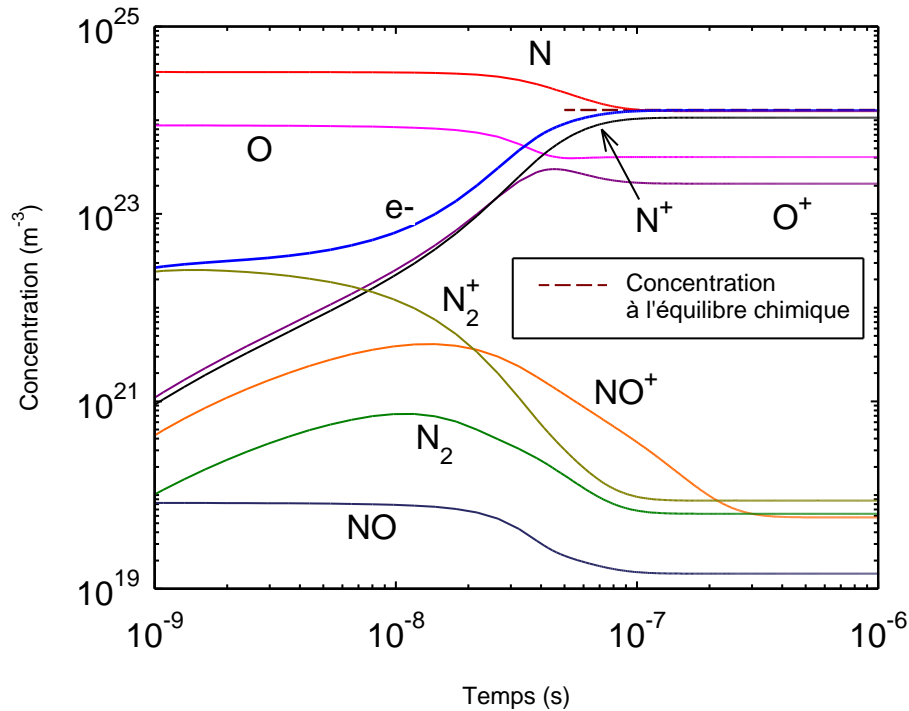


Figure 4.c. : Évolutions des concentrations chimiques d'un plasma d'air en fonction du temps pour le pic de dissociation de N ($T=17.450$ K pour 10 atm) en supposant un chauffage instantané.

Les évolutions des concentrations chimiques, correspondant au deuxième pic de la conductivité thermique, et qui concernent la dissociation de l'azote sont données sur les figures 3 pour trois pressions 1 atm., 5 atm. et 10 atm. On observe que les espèces chimiques majoritaires (N_2 , O et N) atteignent l'équilibre chimique plus rapidement lorsque la pression augmente. Les espèces chimiques minoritaires (électrons, NO^+) semblent plus lentes à atteindre l'équilibre chimique. On peut ainsi introduire deux temps caractéristiques d'équilibre chimique l'un pour les espèces majoritaires l'autre pour les espèces chargées.

Sur les figures 4, nous avons reporté les évolution des concentrations des espèces chimiques du plasma d'air, en fonction du temps, pour trois pressions 1 atm., 5 atm. et 10 atm. Ces variations des concentrations chimiques en fonction du temps correspondent au troisième pic de conductivité thermique qui concerne l'ionisation de l'azote et de l'oxygène atomiques.

On observe que les espèces chimiques majoritaires sont celles de l'azote monoatomique neutre et de l'azote monoatomique ionisé une fois. Les espèces minoritaires comme l'ion NO^+ semblent atteindre l'équilibre chimique plus lentement. Puisque ce sont les espèces neutres et ionisées majoritaires qui influent le plus fortement sur les coefficients de transport, nous pouvons introduire un seul temps caractéristique d'équilibre chimique.

Sur la figure 5, nous avons reporté les temps d'équilibre chimique, deux temps pour la dissociation de l'azote et un seul temps pour l'ionisation de l'oxygène et de l'azote. On remarque que plus la pression augmente plus le temps pour atteindre l'équilibre chimique est faible. On passe ainsi de 40 μs à 1,5 μs pour les espèces majoritaires et de 0,9 ms à 20 μs pour les espèces chargées dans le cas de la dissociation de l'azote. Pour l'ionisation on passe de 5 μs à 0,1 μs . Ainsi plus la pression est grande plus le temps pour atteindre l'équilibre chimique est petit. Nous constatons également que plus la température est élevée plus l'équilibre chimique est atteint rapidement.

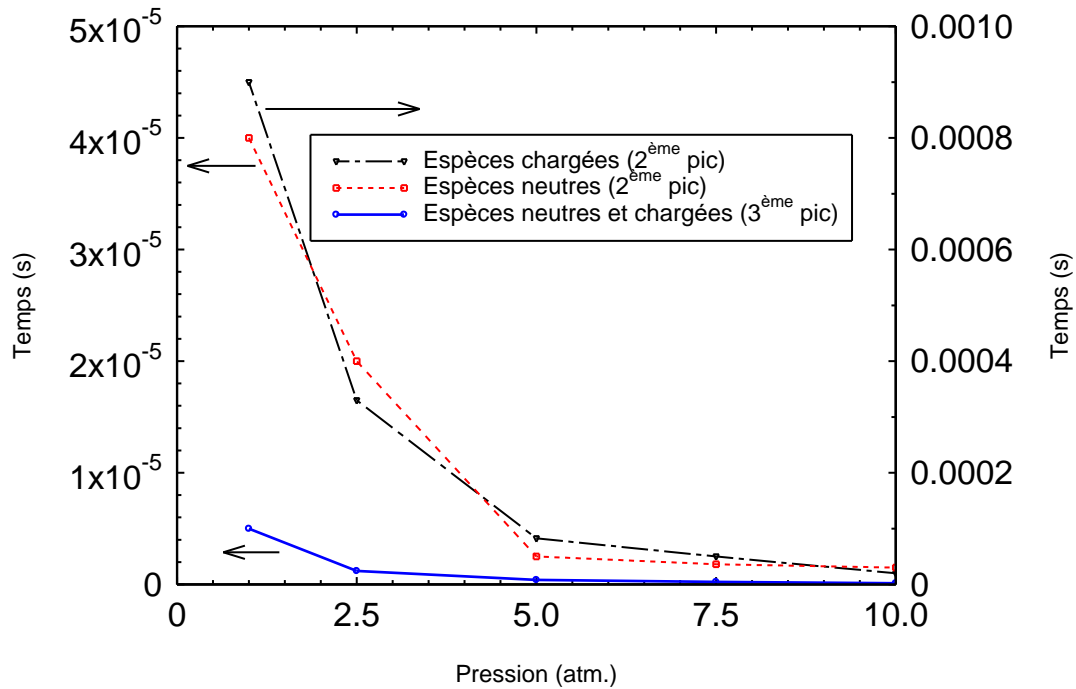


Figure 5. : Évolution du temps pour atteindre l'équilibre chimique en fonction de la pression pour la dissociation de N_2 (deux temps, lignes en pointillés) et l'ionisation de N (un temps, ligne pleine) dans un plasma d'air.

Conclusion

Les modélisations d'écoulement fluide ont besoin comme données de base des propriétés thermodynamiques et des coefficients de transport valides. La majorité des bases de données sont obtenues par une méthode de perturbation de la fonction de distribution des vitesses et la conductivité thermique de réaction est alors calculée par la méthode de Butler et Brokaw [5] qui impose de nombreuses conditions restrictives : les forces extérieures sont négligeables, la pression est uniforme, la diffusion thermique est négligeable, l'équilibre chimique est atteint ainsi que l'équilibre thermique. Afin de valider l'une de ces hypothèses, nous avons évalué le temps de réaction par un modèle de cinétique chimique. Nous avons observé que pour des températures de l'ordre de 7.500 K deux temps de réactions chimiques doivent être introduits celui des espèces majoritaires électriquement neutres qui concerne la conductivité thermique de translation des lourds et la viscosité et celui des espèces chargées qui concerne la conductivité électrique (effet Joule). Pour les températures plus élevées, nous considérons un seul temps pour atteindre l'équilibre chimique des espèces neutres majoritaires et des électrons.

À partir des travaux présentés, nous pouvons préconiser que pour la modélisation du fonctionnement d'appareillages de coupure ayant des temps caractéristiques supérieurs à 1 ms l'approche composition chimique calculé à partir de la minimisation d'une fonction d'état ou de la loi d'action masse couplé avec la méthode de Butler et Brokaw semble correcte. Pour des phénomènes plus rapides comme pour la modélisation de l'ouverture de contact électrique sous courant continu, ces données pourraient ne plus être valides, une approche pseudo-cinétique [16] et des conductivités thermiques reformulées pourraient alors être nécessaires.

Références

- [1] D. Koch (2003), « *Propriétés et utilisations du SF₆ dans les appareils MT et HT* », Cahier technique Schneider Electric n° 188
- [2] M. Abbaoui, Z. Koalaga A. Lefort (1992), « *Propriétés thermodynamiques et de transport des plasmas issus de la vaporisation des isolants PTFE et PE* », J. Phys III France, Vol 2, p 455-472.
Doi : 10.1051/jp3:1992141
- [3] M. Capitelli, R. Celiberto. C. Gorse, D. Giordano, (1996), « *Transport properties of high temperature air components: A review* », PCPP, Vol 16, N°1, p 267S-302S
Doi: 10.1007/BF01512639
- [4] M. I. Boulos, P. Fauchais, E. Pfender (1994), « *Thermal Plasmas* », Plenum Press New York and London. ISBN 0-306-44607-3
- [5] J. N. Butler and R. S. Brokaw (1957), « *Thermal Conductivity of Gas Mixtures in Chemical Equilibrium* », J. Chem. Phys. Vol 26, N°6, p 1636-1643.
Doi: 10.1063/1.1743596
- [6] P. André, M.A. Courty, A. K. Kagoné, Z. Koalaga, N. Kohio, F. Zougmore, (2016), « *Calcul de la composition chimique dans un plasma issu de mélanges de PTFE, d'air, de cuivre et de vapeur d'eau dans le cadre d'appareillages de coupure électrique à air* », JITIPEE, vol. 2, n°1, 3, p 1-18.
Doi : 10.18145/jitipee.v2i1.128.g70
- [7] W. C. Yaguibou, N. Kohio, A. K. Kagoné, Z. Koalaga et F. Zougmore, (2018), « *Influence des aérosols sur la composition à l'équilibre d'un plasma d'air* », JITIPEE, Vol. 4, 5, 1-19.
Doi : 10.18145/jitipee. v4i1.167
- [8] J. Aubreton, M. F. Elchinger, P. André, (2013), « *Influence of Partition Function and Interaction Potential on Transport Properties of Thermal Plasmas* », PCPP, Vol 33, p 367–399.
Doi : 10.1007/s11090-012-9427-3
- [9] P. André, L. Brunet, W. Bussière, J. Caillard, J.M. Lombard, J. Picard, (2004), « *Transport coefficients of plasmas consisting of insulator vapours Application to PE, POM, PMMA PA66 and PC* », European Physical Journal Applied Physics, Vol 25, p 169-182.
Doi: 10.1051/epjap:2004007
- [10] P. André, J. Aubreton, S. Clain, M. Dudeck et al, (2010) « *Transport coefficients in thermal plasma. Applications to Mars and Titan atmospheres* », European Physical Journal D, EDP Sciences: EPJ, Vol 57, N°2, p 227-234.
Doi: 10.1140/epjd/e2010-00036-5
- [11] M. Capitelli, G. Colonna, C. Gorse and A. D'Angola (2000), « *Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium* », Eur. Phys. J. D 11, p 279–289,
Doi: 10.1007/s1005300700
- [12] L. Landau et E. Lifchitz, (1984), « *Physique Statistique* », Édition de Moscou/Éditions Mir

- [13] C. Park, J. T. Howe, R. L. Jaffe and G. V. Candler, (1994), « *Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions. II - Mars entries* », JTHT, Vol. 8, No. 1, p 9–23.
Doi: 10.2514/3.496
- [14] P. André (1997), « *Numerical method and composition at and out of chemical equilibrium in a multitemperature plasma. Application of a pure nitrogen plasma* », Contrib. Plasma Phys., Vol 37, n°1, p 23-40.
Doi: 10.1002/ctpp.2150370104
- [15] C. Park, (1993), « *Review of Chemical-Kinetic Problems of Future NASA Missions, I: Earth Entries* », Journal of Thermophysics and Heat Transfert, Vol. 7, No. 3, pp 385-398.
Doi: 10.2514/3.431
- [16] V. Rat, P. André, J. Aubreton, M.F. Elchinger, P. Fauchais, A. Lefort, (2001), « *A modified pseudo-equilibrium model competing with kinetic models to determine the composition of a two-temperature SF₆ atmosphere plasma* », J Phys. D: Appl. Phys., Vol 34, 2191-2204.
Doi: 10.1088/0022-3727/34/14/315